Cálculo 3A – EP8 – Revisão para o QSR1

Exercício 1: Calcule a integral dupla de $f(x,y) = xy$ sobre a região D limitada por $x = -1$, $y = 1$, $y = x$ e o eixo x.

Exercício 2: Calcule a integral iterada pela reversão da ordem de integração

$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dxdy\,.$$

Exercício 3: Inverta a ordem de integração e calcule o valor de I em

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} e^{x^3}\, dx\, dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}/2}^1 e^{x^3}\, dx\, dy.$$

Exercício 4: Calcule a massa de uma placa contida na região de $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, com $y \geq 0$, cuja densidade no ponto $P = (x,y)$ é proporcional à distância do ponto à origem.

Exercício 5: Considere a região $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$.

(a) Esboce a região D e descreva-a em coordenadas polares.

(b) Calcule a integral dupla de $f(x,y) = x$ sobre a região D.

Exercício 6: Definimos o valor médio de uma função $f(x,y)$ em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ como a integral de $f(x,y)$ em D dividida pela área de D, isto é,

$$m(f,D) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\ dxdy\,.$$

Calcule o valor médio de $f(x,y) = x$ na região D do primeiro quadrante, limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$ e $y = 0$.

Exercício 7: Use uma integral tripla para determinar o volume do sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $y = x$, $x = 0$ e $z = 0$.

Exercício 8: Determine a massa e o centro de massa do sólido W limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$, com $a > 0$, se W tem densidade constante k.

Exercício 9: Calcule a massa do sólido W limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$, sendo a densidade $\delta(x,y,z) = z$.

Exercício 10: Calcule a massa do sólido homogêneo W, limitado pelos planos $y + z = 1$, $x = y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Exercício 11: Calcule $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)^3\, dV$, onde W é limitado pelos planos coordenados e pela porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pertence ao primeiro octante.

Exercício 12: Seja C uma curva interseção do cilindro elíptico $2x^2 - 4x + y^2 = 0$ com o plano $x + z = 1$.

(a) Apresente uma paremetrização diferenciável para C.

(b) Calcule $\displaystyle\int_C \sqrt{2}x\,ds$.

Exercício 13: Seja a curva C parte da interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=9$ com o plano $y=\sqrt{2}x$, situada no primeiro octante.

(a) Parametrize C.

(b) Calcule a massa de C sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z)=x+y$.

Exercício 14: Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da semi esfera $x^2+y^2+z^2=16$, $x\geq 0$, com o plano $y+z=4$. Sabendo que a densidade em cada ponto (x,y,z) é dada por $\delta(x,y,z)=x$, mostre que o momento de inércia em relação ao eixo x é igual a $\dfrac{32M}{3}$, onde M é a massa do arame.

Exercício 15: Use uma integral tripla para calcular o volume da região W limitada pelos paraboloides $z=x^2+y^2$ e $z=36-3x^2-3y^2$.

Exercício 16: Considere a região

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,-2\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \sqrt{4-x^2},\ 0\leq z\leq \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}.$$

(a) Esboce a região W e descreva-a em coordenadas esféricas.

(b) Calcule a integral tripla de $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{5/2}$ sobre a região W.

Exercício 17: Seja a curva C parte da interseção das superfícies $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$, situada no primeiro quadrante.

(a) Dê uma parametrização diferenciável para C.

(b) Calcule a massa de C, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z)=xyz$.

Exercício 18: Passe para coordenadas polares e calcule

$$I=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dy\,dx.$$

Exercício 19: Calcule $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy$, onde D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Exercício 20: Use uma integral tripla para determinar o volume do sólido W, no primeiro octante, limitado pelo cilindro parabólico $z=1-x^2$ e pelos planos $z=0$, $x=0$, $y=0$ e $y=2$.

Exercício 21: Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido W limitado pelos planos $y+z=1$, $y=x$, $z=0$ e $x=0$.

Exercício 22: Calcule a massa do sólido W limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=8$ e inferiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, se a densidade em (x,y,z) é dada por $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Exercício 23: Se $P(x,y,z)=xy^2$, $Q(x,y,z)=yz^2$ e $R(x,y,z)=zx^2$, calcule

$$\iiint_W\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV,$$

onde W é o sólido dado por $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,x^2+y^2+z^2\leq 1\,,\quad z\geq 0\right\}$.

Exercício 24: Considere o sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sabendo que a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = z^3$, indique (**sem calcular**) a massa de W em coordenadas esféricas na ordem de integração $d\theta\, d\rho\, d\phi$.

Exercício 25: Considere a integral

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\; dzdydx\,.$$

(a) Escreva a integral em coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule o valor de I.

Exercício 26: Considere a integral

$$I = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\; dzdydx\,.$$

(a) Escreva a integral em coordenadas esféricas.

(b) Calcule o valor de I.

Exercício 27: Considere a integral iterada dada em coordenadas cilíndricas:

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 \operatorname{sen}\theta\; dzdrd\theta\,.$$

(a) Expresse I em coordenadas esféricas segundo a ordem de integração $d\theta d\varphi d\rho$.

(b) Calcule o valor de I.

Exercício 28: Seja C um fio delgado com a forma da interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o semiplano $z = \sqrt{3}y$, com $y \geq 0$.

(a) Apresente uma parmetrização diferenciável de C.

(b) Calcule a massa do fio C, sabendo que a densidade de massa é dada por $\delta(x, y, z) = z$

Exercício 29: Um fio fino de densidade $\delta(x, y, z) = z$, encontra-se ao longo da curva C dada por $\vec{r}(t) = (2\cos t)\vec{i} + (2\operatorname{sen} t)\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. O momento de inércia do fio em relação ao eixo z é dado pela integral

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\, \delta(x, y, z)\, ds.$$

Encontre o valor de I_z.

Exercício 30: Seja a curva C parte da interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $z = \sqrt{2}\, x$, situada no primeiro octante.

(a) Apresente uma parametrização diferenciável de C.

(b) Calcule a massa de C, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = \sqrt{6}\, z$.

Exercício 31: Achar a massa de um fio delgado com a forma do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ situado no primeiro quadrante, se a densidade em cada ponto é igual ao produto das coordenadas do ponto.

Respostas

Exercício 1: $-1/8$.

Exercício 2: $\frac{1}{5}\left(\sqrt{31}-1\right)$.

Exercício 3: $I=\int_0^1\int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3}\ dydx = e-1$.

Exercício 4: $7k\pi/3$ *u.m.*

Exercício 5: (a) $D_{r\theta}:\begin{cases}\pi/4\le\theta\le\pi/2\\ 0\le r\le 2.\end{cases}$ (b) $\frac{4}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Exercício 6: $\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$.

Exercício 7: $1/4$ *u.v.*

Exercício 8: $M=k\pi a^2/8$ *u.m.*; $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(0,0,2a/3)$.

Exercício 9: $1/12$ *u.m.*

Exercício 10: $k/6$ *u.m.*

Exercício 11: $\pi/18$.

Exercício 12: (a) $C:\gamma(t)=(1+\cos t,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t,-\cos t)$ com $0\le t\le 2\pi$. (b) 4π.

Exercício 13: (a) $C:\gamma(t)=\left(\sqrt{3}\cos t,\ \sqrt{6}\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t\right)$, com $0\le t\le\pi/2$. (b) $M=3\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ *u.m.*

Exercício 15: 162π *u.v.*

Exercício 16: (a) $W_{\rho\phi\theta}: 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\rho\le 2,\ \ 0\le\phi\le\pi/2$. (b) 32π.

Exercício 17: (a) $\gamma(t)=(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 2\sqrt{3})$, com $0\le t\le\pi/2$. (b) $M=8\sqrt{3}$ *u.m.*

Exercício 18: $I=\frac{9\pi}{2}$.

Exercício 19: $1/6$.

Exercício 20: $4/3$ *u.v.*

Exercício 21: $1/3$ *u.v.*

Exercício 22: $16\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$ *u.m.*

Exercício 23: $2\pi/5$.

Exercício 24: $\int_0^{\pi/4}\int_0^2\int_0^{2\pi}\rho^5\ \cos^3\phi\ \mathrm{sen}\,\phi\ d\theta\,d\rho\,d\phi$.

Exercício 25: (a) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\pi/2} zr^2\ d\theta dz dr$. (b) $\pi/30$.

Exercício 26: (a) $\iiint_{W_{\rho\phi\theta}}\rho^3\,\mathrm{sen}\,\phi\ d\rho d\phi d\theta$ (b) 4π.

Exercício 27: (a) $\int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\rho^3\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta d\varphi d\rho$. (b) 2π.

Exercício 28: (a) $C:\vec{r}(t)=(2\cos t,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t),\quad 0\le t\le\pi$. (b) $4\sqrt{3}$ *u.m.*

Exercício 29: $8\sqrt{5}\,\pi^2$.

Exercício 30: (a) $C:\vec{r}(t)=\left(\sqrt{3}\ \cos t\,,\ 3\ \mathrm{sen}\,t\,,\ \sqrt{6}\ \cos t\right),\quad 0\le t\le\pi/2$. (b) 18 *u.m.*

Exercício 31: 4 *u.m.*